Entfernungsbestimmung durch Auswertung von Parallaxenmessung

Beispiel: Kleinplanet Vesta am 24. Januar 2017 –

Udo Backhaus

24. Februar 2017

1 Einleitung

Parallaxenmessungen an Kleinplaneten mit den Monet-Teleskopen in Texas und Südafrika gehören seit langer Zeit zu den Projektplänen unserer A & I - Gruppe, Leider sind noch nie beide Teleskope gleichzeitig betriebsbereit gewesen. In den Weihnachtsferien 2016/17 erinnerte sich Ronald an das Projekt und versuchte es mit den Teleskopen des LCOGT („Las Cumbres Observatory Global Telescope“[1]) anhand eher zufällig entstandener Fotos von Melpomene. Dieser Versuch schlug leider fehl, weil die mit anderer Zielsetzung aufgenommenen Fotos nicht gleichzeitig entstanden waren. Trotzdem zeigte dieser Versuch, dass eine Parallaxenmesung im Rahmen des LCOGT-Netzwerkes möglich sein sollte. Ronald startete deshalb am 24. Januar 2017 einen neuen Versuch an Vesta, der – für einen ersten geplanten Versuch – recht erfolgreich war.

Die Messergebnisse und ihre Auswertung werden hier (hoffentlich) nachvollziehbar beschrieben. Dabei greife ich auf eine ausführliche Beschreibung des Algorithmus zur Berechnung der Parallaxe zurück, die ich 2009 geschrieben habe ([1]).

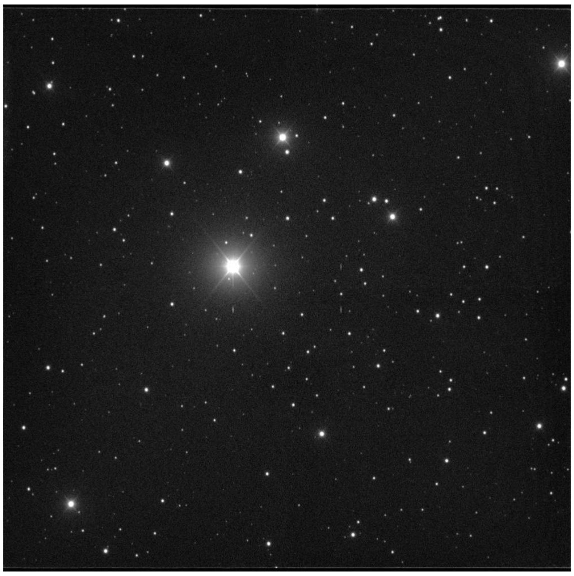
2 Die Messung

Vesta wurde von den Teleskopen in Sutherland[2] und auf dem Teide[3] nahezu zeitgleich fotografiert (Abb. 1). Die folgende Tabelle zeigt die geografischen Koordinaten der Beobachtungsorte und die Aufnahmezeitpunkte:

Teleskop	geogr. Breite	geogr. Länge	Uhrzeit (UT)
Teide	$28°18'00''$	$-16°30'35''$	22:30:31
Sutherland	$-32°22'48''$	$20°48'36''$	22:31:33

Ronald ließ die Astrometrie der Bilder von `Astrometry.net` durchführen. Auf den Ergebnisbildern („new-image.fits“) mit WCS-Koordinaten hat er die folgenden Koordinaten von Vesta gemessen:

[1] `https://lco.global/`
[2] `https://lco.global/site/sutherland/`
[3] `https://lco.global/site/teide/`



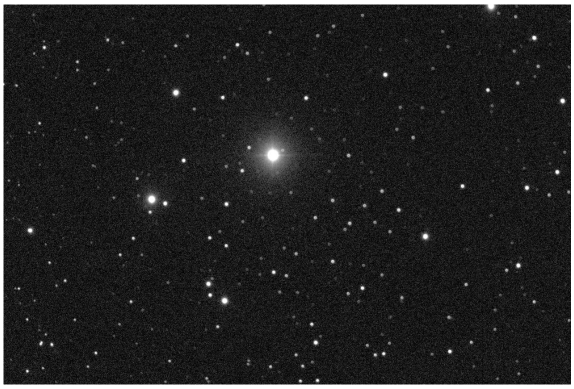


Abbildung 1: Vesta, zeitgleich aufgenommen von den Teleskopen Sutherland (links) und Teide

Teleskop	Uhrzeit (UT)	alpha	delta
Teide	22:30:31	7h54m43.8876s	24°03′58.0752″
Sutherland	22:31:33	7h54m44.0856s	24°04′3.72″

3 Etwas Theorie

Bei der astronomischen Entfernungsbestimmung durch Messung der Parallaxe handelt es sich im Kern um die Berechnung der Höhe eines sehr langen Dreiecks mit dem Spitzenwinkel p und der Basislänge Δ. Der Winkel p ist der Unterschied zwischen den Richtungen, in denen zwei entfernte Beobachter gleichzeitig dasselbe Objekt beobachten. Δ ist der *lineare* Abstand zwischen den beiden Beobachtungsorten. Wenn das Dreieck gleichschenklig ist, lässt sich die Höhe des Dreiecks – und damit die Entfernung d des Objekts – sehr einfach berechnen:

$$d = \frac{\frac{\Delta}{2}}{\tan\frac{p}{2}} \approx \frac{\Delta}{p}$$

Die Näherung gilt, wenn p im Bogenmaß ausgedrückt wird, weil der Parallaxenwinkel in der Regel deutlich kleiner als 1° ist.

Der Parallaxenwinkel p lässt sich einfach berechnen, wenn beide Beobachtungsrichtungen als Äquatorialkoordinaten Rektaszension α und Deklination δ angegeben werden:

- Allgemein lässt sich der eingeschlossene Winkel mit dem Seitenkosinussatz der sphärischen Trigonometrie berechnen:

$$\cos p = \sin\delta_1 \sin\delta_2 + \cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \tag{1}$$

- Die kleinen Parallaxen lassen sich auch mit „Pythagoras“ berechnen:

$$p = \sqrt{((\alpha_1 - \alpha_2)\cos\delta)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}$$

Wenn das Dreieck nicht symmetrisch ist, der Winkel w zwischen der Basisstrecke und der Richtung zum Objekt kein rechter Winkel ist, kommt es auf die Projektion $\Delta_\perp = \Delta \sin w$ der Basislänge senkrecht zur Richtung zum Objekt an:

$$d = \frac{\Delta_\perp}{p} = \frac{\Delta \sin w}{p} \qquad (2)$$

Die Basislänge Δ lässt sich berechnen, wenn man, die Erde als kugelförmig vorausgesetzt, zunächst aus den geographischen Koordinaten den zugehörigen Zentrumswinkel mit dem Seitenkosinussatz (1) bestimmt. Die Bestimmung des Projektionswinkel ist am einfachsten mit etwas Vektorrechnung.

Da damit auch die anderen Teile der Rechnung wesentlich vereinfacht werden, soll nun die Vesta-Parallaxe vektoriell berechnet werden.

4 Die Auswertung

Letztendlich soll die *geozentrische* Entfernung Vestas bestimmt werden, d. h. ihre Entfernung vom Erdmittelpunkt. Im allgemeinen liegen Erdmittelpunkt, die beiden Beobachtungsorte und Vesta nicht in einer Ebene – ein weiterer Grund, die Rechnungen vektoriell durchzuführen. Dazu werden zunächst Positionen der Beobachtungsorte in Äquatorialkoordinaten (α, δ) ausgedrückt ([1], S. 8f):

- Die geographische Breite gibt ebenso wie die Deklination den „Höhenwinkel“ über der Äquatorebene an. Es gilt also: *Die Deklination eines Ortes auf der Erde ist gleich seiner Deklination:* $\delta = \varphi$.

- Durch die Drehung der Erde ändert sich die Rektaszension eines Ortes auf der Erde in 23h56min um 24 h – genau wie seine Sternzeit. Wenn der Frühlingspunkt ($\alpha = 0$) an dem Ort gerade kulminiert, ist seine Sternzeit (= Stundenwinkel des Frühlingspunktes) $\theta = 0h$. Deshalb gilt: *Die Rektaszension eines Ortes ist gleich seiner Sternzeit:* $\alpha = \theta$.

  Die Sternzeiten der Bobachtungsorte zum Zeitpunkt der Aufnahmen lassen sich im Kopf aus Datum, Uhrzeit und geografischer Länge abschätzen ([1], S. 9). Man kann sie sich aber von wohl jedem Planetariumsprogramm (z. B. `Guide`) anzeigen lassen.

Anschließend werden die Winkelkoordinaten in rechtwinklige Koordinaten umgerechnet[4]:

$$(\alpha, \delta) \longrightarrow \vec{r} = (x, y, z) = (\sin\alpha\cos\delta, \cos\alpha\cos\delta, \sin\delta)$$

Damit ergeben sich die Positionen der Beobachtungsorte und die Beobachtungsrichtungen folgendermaßen:

[4] Das Tabellenblatt „Udo“ der Exceltabelle (`http://www.astronomie-und-internet.de/Material/Kleinplanetenparallaxe/Berechnung-der-Parallaxe-und-des-Abstandes.xls`) enthält die vollständige Rechnung.

Beobachtungsort	Sternzeit θ	α	δ		x	y	z
Teide	05:43:14 $\triangleq$ 85.81°	85.81°	28.30°	$\vec{e}_T$	-0.4615	0.7072	-0.5355
Vesta von Teide		118.68°	24.07°	$\vec{e}_1$	-0.4382	0.8010	0.4078
Sutherland	08:12:31 $\triangleq$ 123.13°	123.13°	−32.38°	$\vec{e}_S$	-0.4615	0.7072	-0.5355
Vesta von Sutherl.		118.68°	24.07°	$\vec{e}_2$	-0.4382	0.8010	0.4078

4.1 Vereinfachte Rechnung

Aus den carthesischen Koordinaten der beiden Beobachtungsrichtungen ergibt sich der Parallaxenwinkel p mit Hilfe des Skalarprodukts zwischen den Richtungen $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$, in denen Vesta beobachtet wurde:

$$p = \arccos(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) = 6.26''$$

Zur Berechnung der Basislänge Δ bestimmt man zunächst den von den beiden Beobachtungsorten aufgespannten Zentralwinkel z im Erdmittelpunkt:

$$z = \arccos(\vec{e}_T \cdot \vec{e}_S)$$

und daraus dann die Basislänge (R_E=Erdradius):

$$\sin\frac{z}{2} = \frac{\frac{\Delta}{2}}{R_E} \quad \Longrightarrow \quad \Delta = 2R_E \sin\frac{z}{2} = 1.15 R_E = 7342 km$$

Der Projektionswinkel w ergibt sich aus dem Skalarprodukt des Verbindungsvektors $\vec{e}_T - \vec{e}_S$ mit Vestas Richtungsvektor:

$$\cos w = \vec{e}_1 \cdot \frac{\vec{e}_T - \vec{e}_S}{|\vec{e}_T - \vec{e}_S|} \quad \Longrightarrow \quad w = 108°.$$

Die projizierte Basislänge beträgt damit

$$\Delta_\perp = 1.09 R_E = 6960 km,$$

und die Entfernung von Vesta ergibt sich nach (2) zu

$$\boldsymbol{d_V = 35945 R_E = 229257000 km} \tag{3}$$

Der wahre Abstand zur Zeit der Aufnahmen betrug laut MPC $d_V = 229257000 km$.

4.2 Allgemeine vektorielle Parallaxenrechnung

Bei der vorangehenden Rechnung wird der Abstand des Objektes zur projizierten Basisstrecke bestimmt, nicht sein Abstand vom Erdmittelpunkt, der im Allgemeinen nicht in derselben Ebene liegt. Der Unterschied wird allerdings bei nahen Objekten wie Satelliten oder dem Mond wesentlicher sein als bei (Klein-) Planeten.

Abbildung 2 macht deutlich, dass sich der Ort von Vesta aufgrund der gleichzeitigen Beobachtungen vom Teide und von Sutherland aus auf zwei Weisen ausdrücken lässt:

$$\vec{r}_V = \vec{e}_T + \lambda\vec{e}_1 \text{ und } \vec{r}_V = \vec{e}_S + \lambda\vec{e}_2, \qquad \lambda, \mu > 0$$

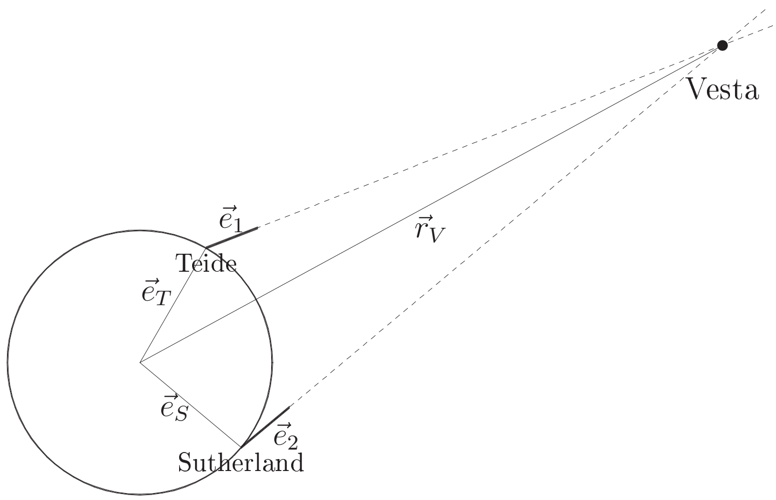


Abbildung 2: Zur Berechnung des Schnittpunktes der beiden Sichtlinien

mit noch unbekannten Faktoren λ und μ. Gleichsetzen der rechten Seiten

$$\vec{e}_T + \lambda_s \vec{e}_1 = \vec{e}_S + \mu_s \vec{e}_2$$

ergibt ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen (für die drei Komponenten der Vektoren) mit nur zwei Unbekannten λ_s und μ_s. Im Allgemeinen wird es unlösbar sein: Aufgrund von Ungenauigkeiten werden sich die beiden Sichtlinien nicht schneiden („windschiefe" Geraden).

Deshalb berechnen wir statt des Schnittpunktes die Stelle der größten Annäherung zwischen den beiden Geraden. Das heißt, wir suchen nach zwei Punkten $\vec{P}_1 = \vec{e}_T + \lambda_s \vec{e}_1$ und $\vec{P}_2 = \vec{e}_S + \mu_s \vec{e}_2$ auf den Sichtlinien, deren Verbindungsvektor senkrecht auf beiden Geraden steht:

$$\begin{aligned}(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_1 &= 0, \\ (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_2 &= 0\end{aligned}$$

Das ist ein System aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten λ_s und μ_s. Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen führt auf

$$\begin{aligned}\lambda_s + \mu_s &= \frac{(\vec{e}_S - \vec{e}_T) \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)}{1 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}, \\ \lambda_s - \mu_s &= \frac{(\vec{e}_S - \vec{e}_T) \cdot (\vec{e}_2 + \vec{e}_1)}{1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}.\end{aligned}$$

Daraus lassen sich die gesuchten Parameter leicht berechnen:

$$\begin{aligned}\lambda_s &= \frac{1}{2} \left((\lambda_s + \mu_s) + (\lambda_s - \mu_s) \right), \\ \mu_s &= \frac{1}{2} \left((\lambda_s + \mu_s) - (\lambda_s - \mu_s) \right)\end{aligned}$$

Vestas Ort im Raum ergibt sich dann schließlich zu

$$r_V = \vec{e}_T + \lambda_s \vec{e}_1 \approx \vec{e}_S + \mu_s \vec{e}_2 \tag{4}$$

Als Maß für die Genauigkeit des Ergebnisses kann man den Minimalabstand $|\vec{P}_1 - \vec{P}_2|$ der beiden Sichtlinien nehmen.

Mit den gemessenen Vesta-Positionen ergeben sich nach diesem Verfahren mit

$$\boldsymbol{d_V = 0.89AE = 20860R_E = 133000000km} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{|\vec{P}_1 - \vec{P}_2| = 0.9R_E} \tag{5}$$

sehr unbefriedigende Ergebnisse.

Ich habe lange nach Fehlern im Algorithmus der Excel-Tabelle[4] gesucht, aber keinen gefunden. Schließlich kam ich auf die Idee, statt der Messwerte die vom MPC angegebenen Vesta-Ephemeriden für die Messzeiten einzusetzen:

Teleskop	Quelle	Uhrzeit (UT)	alpha	delta
Teide	MPC	22:30:30	7h54m44.1s	24°03′58″
	LCGT	22:30:31	7h54m43.8876s	24°03′58.0752″
Sutherland	MPC	22:31:30	7h54m43.8s	24°04′03″
	LCGT	22:31:33	7h54m44.0856s	24°04′3.72″

Obwohl sie sich nur sehr wenig von den Messwerten unterscheiden und sich auch der Parallaxenwinkel nur wenig ändert (von 6.26″ auf 6.47″), folgen aus ihnen viel bessere Ergebnisse:

$$\boldsymbol{d_V = 1.48AE = 34726R_E = 221500000km} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{|\vec{P}_1 - \vec{P}_2| = 0.2R_E} \tag{6}$$

Die Ergebnisse nach dem im letzten Abschnitt beschriebenen vereinfachten Verfahren ändern sich mit den MPC-Daten nur wenig.

Ich verstehe das noch nicht richtig!

5 Fazit

Verglichen mit der vom MPC für den Messzeitpunkt angegebenen Entfernung zwischen Erde und Vesta von $d_V = 1.524AE = 35745R_E = 227980000km$ ist das Ergebnis, das mit der vereinfachten Rechnung gewonnen wurde, recht befriedigend – insbesondere wenn man bedenkt, dass wir dabei ein Dreieck mit einem Seitenverhältnis von etwa 1:35000 ausgemessen haben. Dagegen kann das mit der allgemeinen vektoriellen Methode gewonnene Ergebnis nicht überzeugen; zu stark hängt es von sehr genauen Positionsmessungen ab.

Bei einer erneuten Messung sollte zunächst ein noch näheres Objekt ausgesucht werden, da man bei der Auswahl der Teleskope, und damit auf die Basislänge nur wenig Einfluss hat. Noch wichtiger wird es sein, die Belichtungszeit so kurz einzustellen, dass der Kleinplanet nicht – wie bei dem hier beschriebenen Projekt – überbelichtet ist. Die Auflösung der Bilder betrug etwa $1.5''/Px$. Der Parallaxeneffekt betrug (bei einem Durchmesser des Planetenabbilds von etwa 50 Pixel) also nur etwa 4 Pixel.

Es wird sich sicher lohnen, weitere Parallaxenmessungen „in Auftrag zu geben“!

Literatur

[1] Backhaus, U.: *Über den Zusammenhang zwischen geometrischer Parallaxe und der Entfernung des Mondes*, `http://www.astronomie-und-internet.de/Material/Literatur/IYAParallaxelang.pdf`